Grundbegriffe der Mengenlehre

1. Mengen

Definition:

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, verschiedenen Objekten zu einem Ganzen.
Die einzelnen Objekte werden auch Elemente der Menge genannt.

Beispiele für Mengen:

1) Vater, Mutter und Kind bilden die Familie, die Menge aller Familienmitglieder.

2) Schüler bilden eine Schulklasse, die Menge aller Schüler einer Klasse.

3) Buchstaben des Alphabets bilden eine Menge.

4) Alle Punkte auf einer Geraden bilden eine Menge.

Darstellung von Mengen:

Beispiel: Menge der Wochentage

Mengendiagramm:

Mengenschreibweise:
$\{\text{Montag}, \text{Dienstag}, \text{Mittwoch}, \text{Donnerstag}, \text{Freitag}, \text{Samstag}, \text{Sonntag}\}$

Mengenzeichen:

Beispiel:

$M = \{2, 3, 5, 9\}$

2 ist ein Element der Menge M kürzer: $2 \in M$

4 ist kein Element der Menge M kürzer: $4 \notin M$

Aufgaben zu Mengen:

1.0 Prüfen Sie, ob der Mengenbegriff im mathematischen Sinn verwendet wird.

1.1 Im letzten Winter gab es eine Menge Schnee.

1.2 Petra nennt die Menge der einstelligen Primzahlen.

1.3 Peter nennt die Menge der Buchstaben des Wortes Mississippi.

1.4 Im Fußballstadion befand sich eine große Menge Zuschauer.

1.5 Beim Einkaufsbummel haben wir eine Menge Geld ausgegeben.

2.0 Schreiben Sie die Mengen in aufzählender Mengenschreibweise.

2.1 Menge der Sommermonate.

2.2 Menge aller Vokale.

2.3 Menge aller Buchstaben, die im Alphabet zwischen d und k stehen.

2.4 Menge der Erdteile.

2.5 Menge der Quadratzahlen, die zugleich auch Primzahlen sind.

3.0 Schreiben Sie die Zahlenmengen in aufzählender Mengenschreibweise und notieren Sie die Elementanzahl.

3.1 Menge aller einstelligen ungeraden Zahlen.

3.2 Menge aller Primzahlen, die kleiner als 20 sind.

3.3 Menge der Teiler von 15.

3.4 Menge der Vielfachen von 17 zwischen 60 und 90.

3.5 Menge der geraden Primzahlen.

3.6 Menge der Quadratzahlen zwischen 60 und 90.

3.7 Menge der ungeraden Zahlen bis 29.

3.8 Menge der zweistelligen geraden Zahlen.

3.9 Menge der Vielfachen von 15.

4.0 Entscheiden Sie, welches Zeichen $\in$ oder $\notin$ eingesetzt werden muss.

4.1 7 ___ $\{1,3,5,7,9\}$ ○

4.2 6 ___ $\{10,11,12\}$ ○

4.3 91 ___ $\{7,14,21,28,\ldots\}$ ⊘

4.4 256 ___ $\{2,4,8,16,32,\ldots\}$ ⊘

4.5 256 ___ $\{2,5,6\}$ ○

Lösungen zu den Aufgaben:

1.1 nicht mathematisch

1.2 mathematisch

1.3 mathematisch

1.4 nicht mathematisch

1.5 nicht mathematisch

2.1 $M=\{\text{Juni, Juli, August}\}$

2.2 $M=\{a,e,i,o,u\}$

2.3 $M=\{e,f,g,h,i,j\}$

2.4 $M=\{\text{Afrika, Amerika, Asien, Australien, Europa}\}$

2.5 $M=\{\ \}$

3.1 $M=\{1,3,5,7,9\} \Rightarrow 5$

3.2 $M=\{2,3,5,7,11,13,17,19\} \Rightarrow 8$

3.3 $M=\{1,3,5,15\} \Rightarrow 4$

3.4 $M=\{68,85\} \Rightarrow 2$

3.5 $M=\{2\} \Rightarrow 1$

3.6 $M=\{64,81\} \Rightarrow 2$

3.7 $M=\{1,3,5,7,...,27,29\} \Rightarrow 15$

3.8 $M=\{10,12,14,...,96,98\} \Rightarrow 45$

3.9 $M=\{15,30,45,....\} \Rightarrow$ unendlich viele

4.1 $7 \in \{1,3,5,7,9\}$

4.2 $6 \notin \{10,11,12\}$

4.3 $91 \in \{7,14,21,28,...\}$

4.4 $256 \in \{2,4,8,16,32,...\}$

4.5 $256 \notin \{2,5,6\}$

2. Beziehungen zwischen Mengen

Gleichheit von Mengen und Teilmengen

Beispiel:

Gegeben sind die Mengen A = {2, 5, 9, 11}, B = {1, 3, 4, 8}, C = {5, 3 + 8, 2, $3 \cdot 3$} und D = {2, 9, 11}.

1 Vergleichen Sie die Mengen A und C.

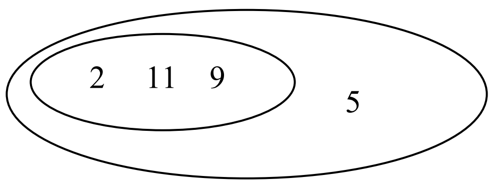
Schreibweise: A = C

Zwei Mengen A und B heißen genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

aber: $A \neq D$

2 Vergleichen Sie die Mengen A und D.

Veranschaulichung:



Schreibweise: $D \subset A$ aber: $A \not\subset D$

Eine Menge A heißt Teilmenge einer Menge B, wenn jedes Element von A zugleich auch Element von B ist.

3 Vergleichen Sie die Mengen A und B.

Die Mengen A und B haben keine Element gemeinsam.
Solche Mengen nennt man auch disjunkt oder fremd.

<u>Aufgaben:</u>

1 Gegeben sind die Mengen A = {a, b, d}, B = {a, b, c}, C = {a, b} und D = {b}.
Bestimmen Sie alle möglichen Beziehungen zwischen den Mengen A, B, C und D.

2 Geben Sie alle möglichen Teilmengen der Menge A = {1, 3, 5} an.

3 Setzen Sie eines der Symbole $\subset$ bzw. $\not\subset$ ein.

$\{0\}\ \square\ \varnothing$

$\varnothing\ \square\ A$

4.0 Gegeben sind die Mengen $A=\{1,2,...,9,10\}$, $B=\{2,4,6,8\}$ und $C=\{1,3,5,7,9\}$.
Ermitteln Sie, welches der Zeichen $\in, \notin, \subset$ oder $\not\subset$ zu verwenden ist.

4.1 $\{3\}\square B$

4.2 $4\square C$

4.3 $\{1,2,3\}\square C$

4.4 $\{4,6\}\square B$

4.5 $C\square A$

4.6 $B\square C$

4.7 $5\square A$

4.8 $\{\ \}\square C$

5.0 Betrachten Sie die folgenden Mengen:
A = Menge aller Zahlen, deren Quadrat zwischen 45 und 90 liegt.
B = Menge aller Zahlen, deren Fünffaches zwischen 27 und 51 liegt.
C = Menge aller Zahlen, deren 17-faches größer als 100 ist.
D = Menge aller Zahlen, deren Sechsfaches weniger als 10 von 50 abweicht.

5.1 Geben Sie die Mengen A, B, C und D in aufzählender Mengenschreibweise an.

5.2 Vergleichen Sie (mit $\subset$ oder $\not\subset$) die folgenden Mengen miteinander.
$A\square B$ $A\square C$ $A\square D$ $B\square C$

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $C \subset A$; $D \subset A$; $D \subset B$; $D \subset C$; $C \subset B$

2 $\emptyset; \{1\}; \{3\}; \{5\}; \{1;3\}; \{1;5\}; \{3;5\}; \{1;3;5\}$

3
$\{0\} \not\subset \emptyset$
$\emptyset \subset A$

Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden Menge.

4.1 $\{3\} \not\subset B$ 4.2 $4 \notin C$ 4.3 $\{1,2,3\} \not\subset C$ 4.4 $\{4,6\} \subset B$
4.5 $C \subset A$ 4.6 $B \not\subset C$ 4.7 $5 \in A$ 4.8 $\{\ \} \subset C$

5.1 $A = \{7;8;9\}$ $B = \{6;7;8;9;10\}$ $C = \{6;7;8;9;...\}$ $D = \{7;8;9\}$

5.2 $A \subset B$ $A \subset C$ $A \subset D$ $B \subset C$

Durchschnitt von Mengen

Beispiel:

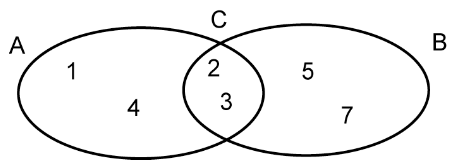
Gegeben sind die Mengen A = {1, 2, 3, 4} und B = {2, 3, 5, 7}.
Bestimmen Sie die Menge $C = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$.

$C = \{2;3\}$

> Eine Menge C von Elementen, die sowohl zu einer Menge A als auch zu einer Menge B gehören, nennt man auch Durchschnitt der Mengen A und B.

Schreibweise: $C = A \cap B$

Veranschaulichung mit den Mengendiagrammen:



Aufgaben:

1 Gegeben sind die Mengen A = {2, 4, 6, 8} und B = {1, 3, 5, 7}.
Bestimmen Sie $A \cap B$.

2 Gegeben sind die Mengen A = {2, 4, 6, 8} und B = {2, 4}.
Bestimmen Sie $A \cap B$.

3
$A \cap \varnothing =$
$A \cap A =$

4 Gegeben sind die Mengen A = {4, 5, 6, 7, 8}, B = {4, 6, 8, 10, 12} und
C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Bestimmen Sie $A \cap C$, $A \cap B$ und $B \cap C$.

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $A \cap B = \{\ \}$

2 $A \cap B = \{2;4\}$

3
$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cap A = A$

4 $A \cap C = \{4;5;6\}$ $A \cap B = \{4;6;8\}$ $B \cap C = \{4;6\}$

Vereinigung von Mengen

Beispiel:

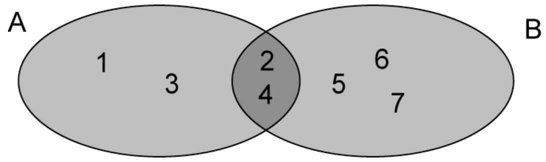
Gegeben sind die Mengen A = {1, 2, 3, 4} und B = {2, 4, 5, 6, 7}.
Bestimmen Sie die Menge $C = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$.

$C = \{1;2;3;4;5;6;7\}$

Eine Menge C von Elementen, die entweder zu einer Menge A oder zu einer Menge B gehören, nennt man auch die Vereinigung von A und B.

Schreibweise: $C = A \cup B$

Veranschaulichung mit den Mengendiagrammen:



Aufgaben:

1 Gegeben sind die Mengen A = {a, b, c, d}, B = {a, c, e, f}, C = {e, f, g}, D = {b, d} und E = {a, b, c, d, e, f}.
Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup D$ und $A \cup E$.

2
$A \cup \varnothing =$
$A \cup A =$

3 Gegeben sind die Mengen M = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, $A = \{x \in M \mid x \leq 3\}$ und $B = \{x \in M \mid 2 \leq x < 5\}$.
Bestimmen Sie $A \cup B$ und $A \cap B$.

4.0 Gegeben sind die Mengen $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $A = \{2,4,6\}$.
Bestimmen Sie eine Menge B so, dass $M = A \cup B$ gilt und dabei B

4.1 möglichst wenig Elemente enthalten soll.

4.2 möglichst viel Elemente enthalten soll.

Lösungen zu den Aufgaben:

1

$A \cup B = \{a;b;c;d;e;f\}$

$A \cup C = \{a;b;c;d;e;f;g\}$

$A \cup D = \{a;b;c;d\} = A$

$A \cup E = \{a;b;c;d;e;f\} = E$

Ist B eine Teilmenge von A, so gilt: $A \cup B = A$

2

$A \cup \emptyset = A$

$A \cup A = A$

3

$A = \{1;2;3\}$ $\quad B = \{2;3;4\}$

$A \cup B = \{1;2;3;4\}$ $\quad A \cap B = \{2;3\}$

4.1 $B = \{1;3;5\}$

4.2 $B = \{1;2;3;4;5;6\} = M$

Die Komplementmenge

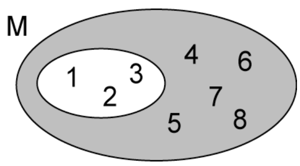
Beispiel:

Gegeben sind die Mengen M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} und A = {1, 2, 3}.
Bestimmen Sie die Menge $B = \{ x \mid x \in M \text{ und } x \notin A \}$.

$B = \{4;5;6;7;8\}$

> Wenn $A \subset M$ ist, so heißt die Menge aller Elemente von M, die nicht zu A gehören, Komplement von A.

Veranschaulichung mit den Mengendiagrammen:



Aufgaben:

1 Gegeben sind die Mengen M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, A = {1, 4, 5} und B = {4, 6, 7}.
Bestimmen Sie $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ und $\overline{A \cup B}$.

2 Gegeben sind die Mengen M = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {1}, B = {2, 3}, C = {4, 5} und D = {6, 7, 8, 9}.
Bestimmen Sie $\overline{D}$, $\overline{A \cup C}$ und $\overline{B \cap D}$.

Lösungen zu den Aufgaben:

1

$\overline{A} = \{2;3;6;7\}$

$\overline{B} = \{1;2;3;5\}$

$A \cap B = \{4\} \quad \Rightarrow \overline{A \cap B} = \{1;2;3;5;6;7\} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$A \cup B = \{1;4;5;6;7\} \quad \Rightarrow \overline{A \cup B} = \{2;3\} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2

$\overline{D} = \{1;2;3;4;5\}$

$\overline{A \cup C} = \{2;3;6;7;8;9\} = B \cup D$

$\overline{B \cap D} = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\} = M$

3. Zahlenmengen

Die Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;...\}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{N}^* = \{1;2;3;...\}$

Teilmengen von $\mathbb{N}$:

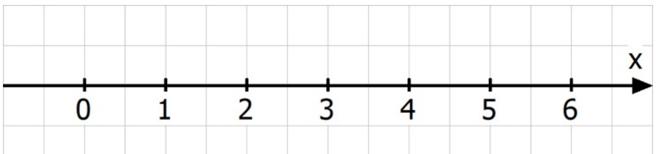
Menge der geraden Zahlen: $\mathbb{N}_g = \{0;2;4;6;8;...\} \subset \mathbb{N}$

Menge der ungeraden Zahlen: $\mathbb{N}_u = \{1;3;5;7;...\} \subset \mathbb{N}$

Menge der Primzahlen: $\mathrm{IP} = \{2;3;5;7;11;...\} \subset \mathbb{N}$

Menge der Teiler von 18: $T_{18} = \{1;2;3;6;9;18\} \subset \mathbb{N}$

Veranschaulichung der natürlichen Zahlen auf dem Zahlenstrahl:



Vergleich von Zahlen:

Beispiele:

1) $5 < 8$ „kleiner als“

2) $105 > 99$ „größer als“

Von zwei Zahlen auf dem Zahlenstrahl ist die rechts stehende immer die größere und die links stehende die kleinere Zahl.

Aufgaben:

1 Ordnen Sie folgende Zahlen zu einer Kleiner-Kette. ○
655, 556, 565, 566, 665, 656

2.0 Ermitteln Sie, welche Rechnungen in der Menge der natürlichen Zahlen durchführbar sind.

2.1 $221-129$ ○ 2.2 $153:17$ ○ 2.3 $0:171$ ○ 2.4 $17:0$ ○

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $556 < 565 < 566 < 655 < 656 < 665$

2.1 $221 - 129 = 92$ 2.2 $153 : 17 = 9$ 2.3 $0 : 171 = 0$ 2.4 nicht durchführbar

Die Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$

Teilmengen von $\mathbb{Z}$:

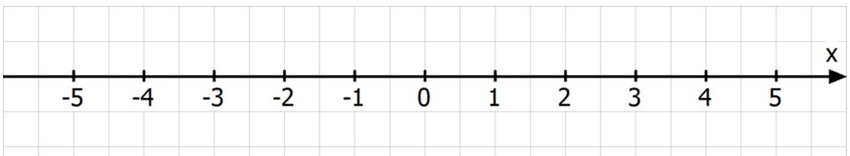
Menge der positiven ganzen Zahlen: $\mathbb{Z}^+ = \{1;2;3;4;...\} = \mathbb{N}^*$

Menge der negativen ganzen Zahlen: $\mathbb{Z}^- = \{...;-4;-3;-2;-1\}$

Menge der positiven ganzen Zahlen mit Null: $\mathbb{Z}_0^+ = \{0;1;2;3;4;...\} = \mathbb{N}$

Menge der negativen ganzen Zahlen mit Null: $\mathbb{Z}_0^- = \{...;-4;-3;-2;-1;0\}$

Veranschaulichung der ganzen Zahlen auf der Zahlengeraden:



Aufgaben:

1 Ermitteln Sie den Abstand der folgenden Zahlenpunkte vom Nullpunkt.
-6; 3; 18; -132

Die Maßzahl des Abstands einer ganzen Zahl a vom Nullpunkt der Zahlengeraden heißt Betrag von a und wird mit $|a|$ bezeichnet. Die senkrechten Striche heißen Betragsstriche.
Zahlen wie zum Beispiel -3 und 3, die den gleichen Betrag haben, bezeichnet man als Gegenzahlen.

2 Ordnen Sie die folgenden berühmten Persönlichkeiten in der richtigen zeitlichen Reihenfolge.

Karl der Große 768 n.Chr.	Pythagoras 570 v.Chr.
Albert Einstein 1879 n.Chr.	Otto von Bismarck 1815 n.Chr.
Julius Cäsar 100 v.Chr.	Alexander der Große 356 v.Chr.
Columbus 1451 n.Chr.	Hannibal 246 v.Chr.
Maria Stuart 1542 n.Chr.	Goethe 1749 n.Chr.
Platon 427 v.Chr.	Euklid 365 v.Chr.

3.0 Berechnen Sie.

3.1 $|8| - |-8|$ 3.2 $|-11| - |10|$ 3.3 $|-19| - 15$

3.4 $20 + |-17|$ 3.5 $|-17| - |13| + 16$ 3.6 $|-12| - |8| + |-13|$

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $|-6|=6$ $|3|=3$ $|18|=18$ $|-132|=132$

2 Pythagoras, Platon, Euklid, Alexander der Große, Hannibal, Julius Cäsar, Karl der Große, Columbus, Maria Stuart, Goethe, Otto von Bismarck, Albert Einstein

3.1 $|8|-|-8|=8-8=0$ 3.2 $|-11|-|10|=11-10=1$ 3.3 $|-19|-15=19-15=4$

3.4 $20+|-17|=20+17=37$ 3.5 $|-17|-|13|+16=17-13+16=20$

3.6 $|-12|-|8|+|-13|=12-8+13=17$

Die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,|\,p,q\in\mathbb{Z}\text{ mit }q\neq 0\right\}$$

Teilmengen von $\mathbb{Q}$:

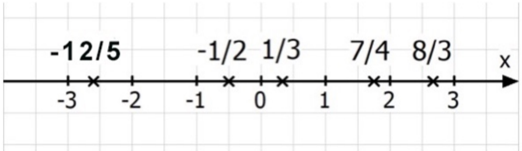
Menge der positiven rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}^{+}$

Menge der negativen rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}^{-}$

Menge der positiven rationalen Zahlen mit Null: $\mathbb{Q}_0^{+}$

Menge der negativen rationalen Zahlen mit Null: $\mathbb{Q}_0^{-}$

Darstellung von rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden:



Dezimalschreibweise für rationale Zahlen:

Abbrechende (endliche) Dezimalzahlen: $\frac{1}{5}=0{,}2 \qquad \frac{1}{100}=0{,}01$

Reinperiodische Dezimalzahlen: $\frac{1}{3}=0{,}3333...=0{,}\overline{3} \qquad \frac{3}{11}=0{,}272727....=0{,}\overline{27}$

Gemischtperiodische Dezimalzahlen: $\frac{1}{6}=0{,}1666....=0{,}1\overline{6} \qquad \frac{7}{22}=0{,}3181818...=0{,}3\overline{18}$

Dichtheit der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$:

Zwischen zwei beliebig nahe beieinander liegenden rationalen Zahlen liegen immer noch unendlich viele weitere rationale Zahlen.

Beispiel:

$a=1{,}23457 \quad b=1{,}23456$

$1{,}23456<1{,}234561<1{,}23457$

Aufgaben:

1.0 Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1.1 Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl.

1.2 Jede rationale Zahl ist auch eine ganze Zahl.

1.3 Die Null gehört zu den positiven rationalen Zahlen.

1.4 In der Menge der rationalen Zahlen ist die Subtraktion uneingeschränkt durchführbar.

1.5 Jede ganze Zahl lässt sich als Bruch darstellen.

2.0 Entscheiden Sie, ob die Mengenbeziehungen wahr oder falsch sind.

2.1 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ 2.2 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ 2.3 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^+$ 2.4 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}^-$

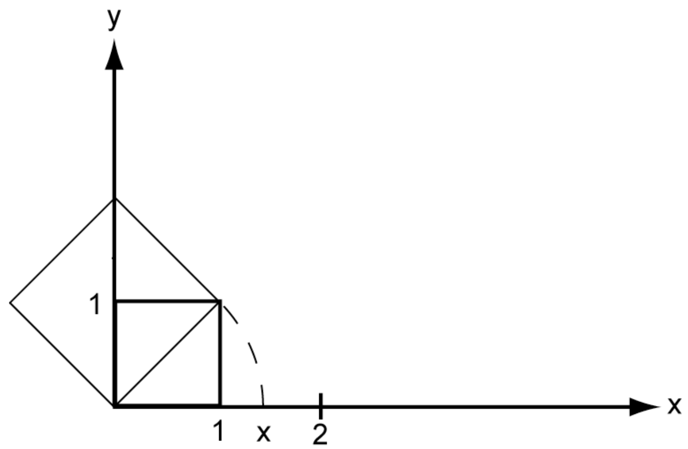
2.5 $\mathbb{Q}^- \cap \mathbb{Q}^+ = \{\ \}$ 2.6 $\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}$

<u>Lösungen zu den Aufgaben:</u>

1.1 Wahr	1.2 Falsch	1.3 Falsch
1.4 Wahr	1.5 Wahr	
2.1 Wahr	2.2 Wahr	2.3 Falsch ($0 \notin \mathbb{Q}^+$)
2.4 Falsch	2.5 Wahr	2.6 Falsch ($0 \notin \mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+$)

Die Menge der reellen Zahlen

Problem: Verdoppelung einer Quadratfläche



Bestimmung der Seitenlänge x durch Intervallschachtelung:

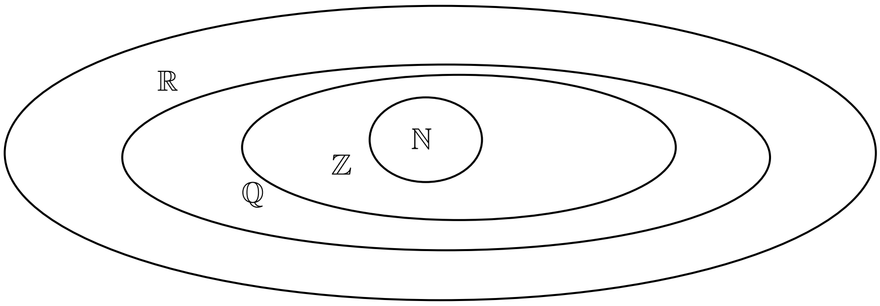
$1 < x < 2$	$1 < x^2 < 4$
$1{,}4 < x < 1{,}5$	$1{,}96 < x^2 < 2{,}25$
$1{,}41 < x < 1{,}42$	$1{,}9881 < x^2 < 2{,}0164$
$1{,}414 < x < 1{,}415$	$1{,}999396 < x^2 < 2{,}002225$
$1{,}4142 < x < 1{,}4143$	$1{,}99996164 < x^2 < 2{,}00024449$

$\Rightarrow x = 1{,}4142.... = \sqrt{2}$ (Wurzel aus 2)

Bei $\sqrt{2}$ handelt es sich nicht um eine rationale Zahl, weil sie sich nicht als Dezimalzahl darstellen lässt. Unendliche Brüche ohne Periode heißen auch irrationale Zahlen.
Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

Beispiele für irrationale Zahlen: $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \pi, e, ...$

Zusammenhang zwischen den Zahlenmengen:



Bemerkung:

Die Punkte, die zu den reellen Zahlen gehören, füllen die Zahlengerade vollständig aus.
Man sagt auch, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen vollständig ist.